



NEW GRE

آزمون چندگزینه ای ریاضی GRE

نوشته: موسسه خدمات آزمونهای آموزشی

ترجمه: احسان کوثری نیا



آزمون ریاضی

زمان - ۱۷۰ دقیقه

۶۶ پرسش

راهنما: هر یک از پرسشها یا جملات ناقص زیر دارای پنج پاسخ می باشد. یکی از آنها بهترین گزینه بوده و گزینه مربوطه را در برگه پاسخنامه علامت بزنید.

برگه چکنویس و محاسبات نیز در همین دفترچه آزمون تعبیه شده است.

توجه: در این آزمون:

(۱) تمامی لگاریتمهایی که مبنای آنها مشخص نشده اند از نوع لگاریتم طبیعی می باشند (یعنی، مبنای آن عدد e است).

(۲) مجموعه تمامی اعداد حقیقی x که $a \leq x \leq b$ باشد با نماد $[a, b]$ نشان داده شده است.

(۳) علامتهای $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ به ترتیب بیانگر مجموعه اعداد صحیح، حقیقی، گویا و مختلط می باشد.

$$F'(x) = \quad \text{اگر } F(x) = \int_e^x \log t \, dt \text{ برای تمامی مقادیر مثبت } x \text{ باشد، آنگاه}$$

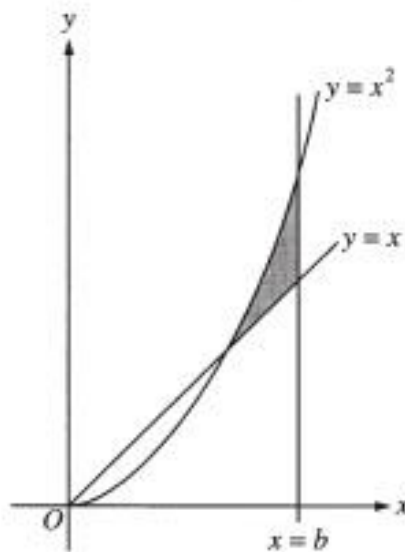
- (A) x
- (B) $\frac{1}{x}$
- (C) $\log x$
- (D) $x \log x$
- (E) $x \log x - 1$

۲. اگر $F(1)=2$ باشد و رابطه $F(n)=F(n-1)+0.5$ برای تمامی n های صحیح بزرگتر از ۱ برقرار باشد، آنگاه $F(101)=$

- (A) 49
 - (B) 50
 - (C) 51
 - (D) 52
 - (E) 53
-

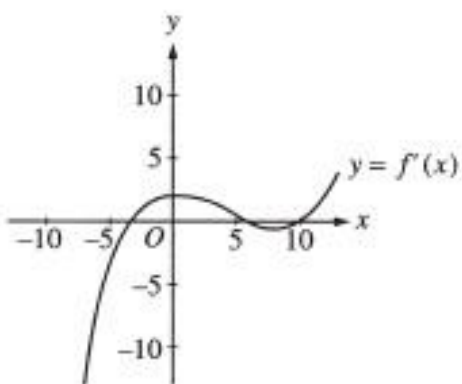
۳. اگر $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ در فرآیند ضرب ماتریسی یک ماتریس وارون پذیر باشد، وارون آن برابر است با:

- (A) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$
 (B) $\frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$
 (C) $\frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$
 (D) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$
 (E) $\frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}$
-



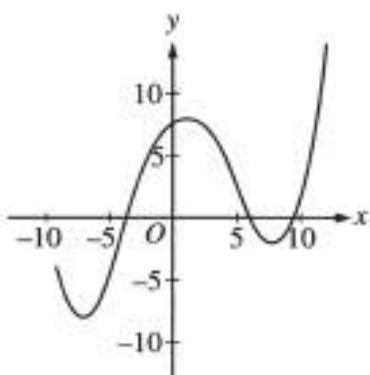
۴. اگر b مثبت باشد و رابطه $\int_0^b x \, dx = \int_0^b x^2 \, dx$ برقرار باشد، آنگاه مساحت ناحیه هاشور خورده در شکل بالا برابر است با:

- (A) $\frac{1}{12}$
 (B) $\frac{1}{6}$
 (C) $\frac{1}{4}$
 (D) $\frac{1}{3}$
 (E) $\frac{1}{2}$
-

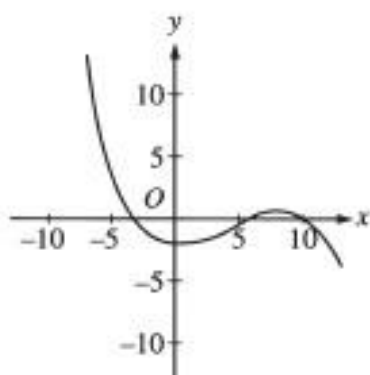


۵. اگر شکل بالا نمودار تابع $y = f'(x)$ باشد، کدام یک از شکلهای زیر نمودار تابع $y = f(x)$ است؟

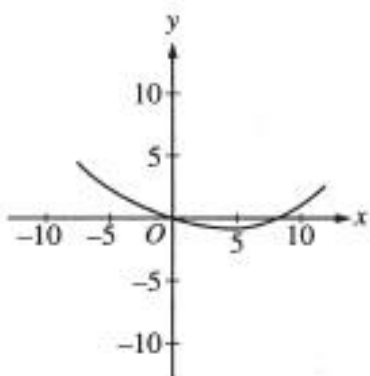
(A)



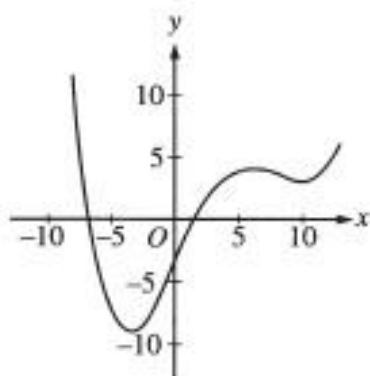
(D)



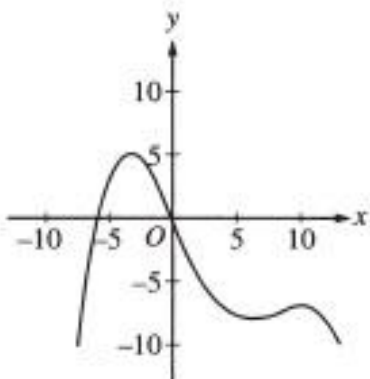
(B)



(E)



(C)



۶. الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

۱. $k=999$ ، $i=1$ و $p=0$ می باشد.

۲. اگر $k > i$ باشد، آنگاه به مرحله ۳ برو، در غیر این صورت به مرحله ۵ برو.

۳. i را با $2i$ جایگزین کن و p را با $p+1$ جایگزین کن.

۴. به مرحله ۲ برو.

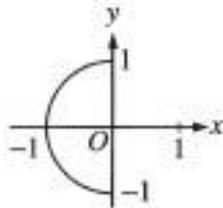
۵. p را چاپ کن.

با اجرای الگوریتم فوق، چه عددی در مرحله ۵ چاپ خواهد شد؟

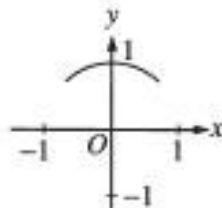
- (A) 1
- (B) 2
- (C) 10
- (D) 512
- (E) 999

۷. کدام یک از شکل‌های زیر مربوط به نمودار تابع $\left\{ (\sin t, \cos t) : -\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0 \right\}$ در صفحه xy است؟

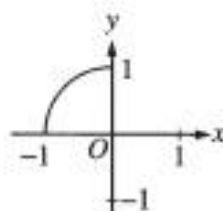
(A)



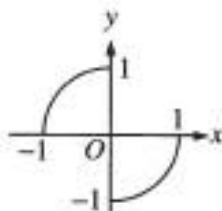
(D)



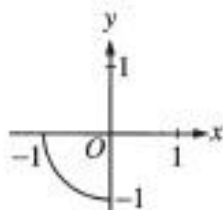
(B)



(E)



(C)



$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \quad \text{۸}$$

- (A) 1
- (B) $\frac{\pi}{4}$
- (C) $\tan^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}$
- (D) $\log 2$
- (E) $\log \sqrt{2}$

۹. اگر S مجموعه ای محدود و غیر تهی با تعداد عضو k باشد، آنگاه تعداد تمامی توابع یک به یک از S به S برابر است با:

- (A) $k!$
- (B) k^2
- (C) k^k
- (D) 2^k
- (E) 2^{k+1}

۱۰. اگر تابع g در مجموعه اعداد حقیقی به گونه ای تعریف شده باشد که اگر x یک عدد گویا باشد، آنگاه $g(x)=1$ و اگر x عددی غیر گویا باشد، آنگاه $g(x) = e^x$ ، در این صورت مجموعه اعدادی که تابع g در آنها پیوسته است برابر است با:

- (A) مجموعه تهی
- (B) $\{0\}$
- (C) $\{1\}$
- (D) مجموعه اعداد گویا
- (E) مجموعه اعداد غیر گویا

۱۱. برای تمامی اعداد حقیقی x و y ، عبارت $\frac{x+y+|x-y|}{2}$ برابر است با:

- (A) بیشینه x و y
- (B) کمینه x و y
- (C) $|x+y|$
- (D) میانگین $|x|$ و $|y|$
- (E) میانگین $|x+y|$ و $x-y$

۱۲. فرض کنید B یک مجموعه کرانه دار غیر تهی از اعداد حقیقی باشد و b مرز بالایی B باشد. اگر b عضو B نباشد، کدام یک از جملات زیر لزوماً صحیح است:
- (A) B بسته است.
 (B) B باز نیست.
 (C) b نقطه حدی B است.
 (D) هیچ سری یا توالی در B به b همگرا نمی شود.
 (E) بازه بازی وجود دارد که شامل b باشد ولی شامل هیچ نقطه ای از B نباشد.

۱۳. در یک کشوی لباس، ۲ جوراب آبی، ۴ قرمز، و ۲ زرد وجود دارد. اگر ۲ عدد جوراب به طور تصادفی از کشو درآورده شود، با چه احتمالی آنها هم‌رنگ خواهند بود؟

- (A) $\frac{2}{7}$
 (B) $\frac{2}{5}$
 (C) $\frac{3}{7}$
 (D) $\frac{1}{2}$
 (E) $\frac{3}{5}$

۱۴. اگر R مجموعه اعداد حقیقی باشد و f و g توابعی از R به R باشند، نقیض عبارت زیر کدام یک از عبارات بعدی می باشد؟
 «برای هر s در R ، یک r در R وجود دارد به گونه ای که اگر $f(r) > 0$ باشد، $g(s) > 0$ است.»

- (A) برای هر s در R ، هیچ r در R وجود ندارد به گونه ای که اگر $f(r) > 0$ باشد، $g(s) > 0$ است.
 (B) برای هر s در R ، یک r در R وجود دارد به گونه ای که اگر $f(r) > 0$ باشد، $g(s) \leq 0$ است.
 (C) یک s در R وجود دارد به گونه ای که برای هر r در R ، $f(r) > 0$ و $g(s) \leq 0$ است.
 (D) یک s در R وجود دارد و یک r در R وجود دارد به گونه ای که، $f(r) \leq 0$ و $g(s) \leq 0$ است.
 (E) برای هر r در R ، یک s در R وجود دارد به گونه ای که $f(r) \leq 0$ باشد، $g(s) \leq 0$ است.

۱۵. اگر g تابعی تعریف شده بر روی بازه باز (a, b) باشد به گونه ای که برای تمامی $x \in (a, b)$ ، شرط $a < g(x) < x$ برقرار باشد، آنگاه g .

- (A) یک تابع بدون مرز است.
 (B) یک تابع غیر ثابت است.
 (C) یک تابع غیر منفی است.
 (D) یک تابع فقط افزایشی است.
 (E) تابع چند جمله ای از درجه یک است.

۱۶. برای چه مقدار (یا مقادیری) از m بردار $(1, 2, m, 5)$ یک ترکیب خطی از بردارهای $(0, 1, 1, 1)$ ، $(0, 0, 0, 1)$ و $(1, 1, 2, 0)$ است؟

(A) برای هیچ مقداری از m

(B) تنها -1

(C) تنها 1

(D) تنها 3

(E) برای بی نهایت مقدار m

۱۷. برای تابع f تفاضلات محدود $\Delta f(x)$ و $\Delta^2 f(x)$ با روابط $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ و $\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x)$ تعریف می شود. با توجه به جدول تفاضلات محدود زیر که به صورت ناقص پر شده، مقدار $f(4)$ چقدر است؟

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
1	-1	4	
2		-2	6
3			
4			

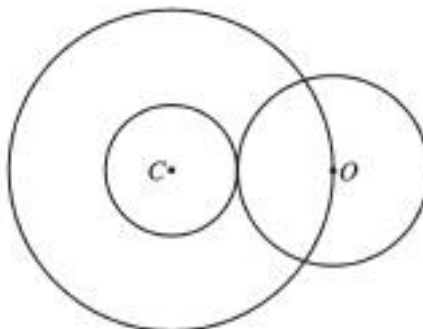
(A) -5

(B) -1

(C) 1

(D) 3

(E) 5



۱۸. در شکل فوق، حلقه با مرکز C دارای شعاع درونی r و شعاع بیرونی 1 است. همچنانکه r افزایش می یابد، دایره به مرکز O بر دایره داخلی مماس باقی می ماند. اگر

$A(r)$ مساحت حلقه و $a(r)$ مساحت دایره به مرکز O باشد، آنگاه $\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{A(r)}{a(r)}$ برابر است با

(A) 0

(B) $\frac{2}{\pi}$

(C) 1

(D) $\frac{\pi}{2}$

(E) ∞

۱۹. کدام یک از موارد زیر مربوط به جداول ضرب برای گروه های با چهار عضو است؟

I.

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

II.

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	a
d	d	c	a	b

III.

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	c	d
d	d	c	d	c

(A) هیچکدام

(B) تنها I

(C) تنها I و II

(D) تنها II و III

(E) I، II، و III

۲۰. کدام یک از عبارات زیر برای تمامی توابع f که بر روی مجموعه همه اعداد حقیقی تعریف شده اند، به گونه ای که $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ یک عدد حقیقی L بوده و $f(0)=0$ درست است؟

I. f در صفر مشتق پذیر است.

II. $L=0$

III. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

(A) هیچکدام

(B) تنها I

(C) تنها III

(D) تنها I و III

(E) I، II، و III

۲۱. مساحت ناحیه محدود میان محورهای مختصات و خط مماس بر منحنی $y = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ در نقطه $(0,1)$ چقدر است؟

(A) $\frac{1}{16}$

(B) $\frac{1}{8}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) 1

(E) 2

۲۲. در نظر بگیرید که Z گروه همه اعداد صحیح تحت عملیات جمع باشد. کدام یک از زیرمجموعه های ذیل یک زیرگروه از Z نمی باشد؟

(A) $\{0\}$

(B) $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$

(C) $\{n \in \mathbb{Z} : n \text{ یک عدد صحیح زوج است}\}$

(D) $\{n \in \mathbb{Z} : n \text{ هم بر 6 و هم بر 9 تقسیم پذیر است}\}$

(E) Z

۲۳. در صفحه اقلیدسی نقطه A بر روی دایره ای به مرکز O قرار دارد و O نیز بر روی دایره ای به مرکز A واقع است. دو دایره در نقاط B و C همدیگر را قطع کرده اند. اندازه زاویه BAC چقدر است؟

(A) 60°

(B) 90°

(C) 120°

(D) 135°

(E) 150°

۲۴. کدام یک از مجموعه های بردارهای زیر مبنایی برای زیرفضایی از چهارفضای اقلیدسی می باشند که همه بردارها بر هر دو بردار $(0,1,1,1)$ و $(1,1,1,0)$ عمود باشند؟

(A) $\{(0, -1, 1, 0)\}$

(B) $\{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$

(C) $\{(-2, 1, 1, -2), (0, 1, -1, 0)\}$

(D) $\{(1, -1, 0, 1), (-1, 1, 0, -1), (0, 1, -1, 0)\}$

(E) $\{(0, 0, 0, 0), (-1, 1, 0, -1), (0, 1, -1, 0)\}$

۲۵. فرض کنید f تابعی باشد که با رابطه $f(x,y)=5x-4y$ بر روی ناحیه ای از صفحه xy تعریف شده باشد که نابرابریهای $x \leq 2$, $y \geq 0$, $x+y \geq 1$ و $y-x \leq 0$ در آنجا برقرار باشند. مقدار بیشینه f در این ناحیه چقدر است؟

(A) 1

(B) 2

(C) 5

(D) 10

(E) 15

۲۶. تابع f به صورت زیر تعریف شده است

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 2 & \text{if } x < 1, \\ -x^2 + 2 & \text{if } x \geq 1. \end{cases}$$

کدام یک از جملات زیر درباره f صحیح است؟

- (A) f در $x=0$ بیشینه مطلق دارد.
- (B) f در $x=1$ بیشینه مطلق دارد.
- (C) f در $x=2$ بیشینه مطلق دارد.
- (D) f بیشینه مطلق ندارد.
- (E) f بیشینه های موضعی در نقاط $x=0$ و $x=2$ دارد.

۲۷. f تابعی است که برای تمامی اعداد حقیقی رابطه $f(x)=f(x-1)$ در آن صادق است. اگر f در همه نقاط مشتق پذیر باشد، آنگاه $f'(0)$ برابر است با:

- (A) $f(0)$
- (B) $f(1)$
- (C) $-f(0)$
- (D) $f'(1)$
- (E) $-f'(1)$

۲۸. اگر V_1 و V_2 زیرفضاهای شش بعدی از یک فضای برداری ۱۰ بعدی V باشند، کوچکترین بعد ممکن برای $V_1 \cap V_2$ چه می تواند باشد؟

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 4
- (E) 6

۲۹. فرض کنید p تابعی چندجمله ای از مجموعه ای از اعداد حقیقی باشد. اگر $p(0)=p(2)=3$ باشد و $p'(0)=p'(2)=-1$ آنگاه $\int_0^2 xp''(x) dx$ برابر است با:

- (A) -3
- (B) -2
- (C) -1
- (D) 1
- (E) 2

۳۰. فرض کنید B پایه ای برای فضای برداری حقیقی V با بُعد بزرگتر از ۱ باشد. کدام یک از عبارات زیر می تواند صحیح باشد؟

- (A) بردار صفر V عضوی از B است.
- (B) B زیر مجموعه مناسبی است که V را در بر می گیرد.
- (C) B زیر مجموعه خاصی از زیر مجموعه مستقل خطی V است.
- (D) پایه ای برای B وجود دارد که از B منشعب می شود.
- (E) یکی از بردارهای B ترکیب خطی از بقیه بردارهای B است.

۳۱. کدام یک از اعداد زیر نمی تواند ریشه چندجمله ای از x به صورت $9x^5 + ax^3 + b$ باشد، که در آن a و b اعداد صحیح هستند؟

- (A) -9
- (B) -5
- (C) $\frac{1}{4}$
- (D) $\frac{1}{3}$
- (E) 9

۳۲. هنگامی که ۲۰ کودک در یک کلاس درس برای صرف نهار در یک صف قرار می گیرند، پت اصرار دارد که همواره جلوی لین قرار گیرد. اگر درخواست پت برآورده شود، به چند روش می توان کودکان را در یک صف قرار داد؟

- (A) $20!$
- (B) $19!$
- (C) $18!$
- (D) $\frac{20!}{2}$
- (E) $20 \cdot 19$

۳۳. چند عدد صحیح از ۱ تا ۱۰۰۰ وجود دارد که بر ۳۰ بخش پذیر باشد ولی بر ۱۶ بخش پذیر نباشد؟

- (A) 29
- (B) 31
- (C) 32
- (D) 33
- (E) 38

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

۳۴. فرض کنید f یک تابع مشتق پذیر باشد که برای آن عبارات زیر باید صحیح باشد؟
هر دو وجود داشته و محدود باشند. کدام یک از

- (A) $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$
- (B) $\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0$
- (C) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$
- (D) f یک تابع ثابت است.
- (E) f' یک تابع ثابت است.

۳۵. در فضای xyz معادله صفحه مماس بر رویه $z = e^{-x} \sin y$ در نقطه ای که $x=0$ و $y = \frac{\pi}{2}$ است برابر است با:

- (A) $x + y = 1$
- (B) $x + z = 1$
- (C) $x - z = 1$
- (D) $y + z = 1$
- (E) $y - z = 1$

۳۶. برای هر عدد حقیقی x ، فرض کنید که $\mu(x)$ میانگین اعداد ۴، ۹، ۷، ۵ و x باشد و $\eta(x)$ میانه این پنج عدد باشد. برای چند مقدار از x رابطه $\mu(x) = \eta(x)$ برقرار است؟

- (A) هیچ.
- (B) یک.
- (C) دو.
- (D) سه.
- (E) بی نهایت.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!} =$$

۳۷

- (A) e
- (B) $2e$
- (C) $(e + 1)(e - 1)$
- (D) e^2
- (E) ∞

۳۸. کدام یک از انتگرالهای زیر در بازه $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ بیشترین مقدار را داراست؟

- (A) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t \, dt$
- (B) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t \, dt$
- (C) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t \, dt$
- (D) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t \, dt$
- (E) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t \cos t \, dt$

۳۹. تابع f را در نظر بگیرید که با رابطه $f(x) = e^{-x}$ در بازه $[0, 10]$ تعریف شده است. اگر $n > 1$ باشد و $x_0, x_1, \dots, x_n$ اعدادی باشند که رابطه $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 10$ میان آنها برقرار باشد، کدام یک از عبارات زیر از بقیه بزرگتر است؟

- (A) $\sum_{j=1}^n f(x_j)(x_j - x_{j-1})$
 (B) $\sum_{j=1}^n f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1})$
 (C) $\sum_{j=1}^n f\left(\frac{x_j + x_{j-1}}{2}\right)(x_j - x_{j-1})$
 (D) $\int_0^{10} f(x) dx$
 (E) 0

۴۰. یک سکه سالم هشت مرتبه انداخته می شود. احتمال آنکه پرتابهای شیر از پرتابهای خط کمتر باشد چقدر است؟

- (A) $\frac{1}{4}$
 (B) $\frac{1}{3}$
 (C) $\frac{87}{256}$
 (D) $\frac{23}{64}$
 (E) $\frac{93}{256}$

۴۱. تابع $f(x, y) = xy - x^3 - y^3$ در کدام یک از نقاط زیر دارای بیشینه نسبی است؟

- (A) (0, 0)
 (B) (1, 1)
 (C) (-1, -1)
 (D) (1, 3)
 (E) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

۴۲. نقاط $A=(-1,2)$ ، $B=(6,4)$ و $C=(1,-20)$ را در صفحه در بگیرید. چند نقطه مختلف D در صفحه وجود دارد که نقاط A، B، C و D گوشه های یک متوازی الاضلاع را تشکیل می دهند؟

- (A) هیچ.
- (B) یک.
- (C) دو.
- (D) سه.
- (E) چهار.

۴۳. اگر A ماتریس سه در سه باشد به گونه ای که $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ باشد، آنگاه حاصلضرب $A \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ برابر است با؟

- (A) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (B) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- (C) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- (D) $\begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}$

(E) با استفاده از اطلاعات ارائه شده نمی توان پاسخ داد

۴۴. f تابعی است که برای تمامی $x > 0$ با رابطه $f(x) = (\sqrt{x})^x$ تعریف شده است. کدام یک از عبارات زیر نادرست است؟

- (A) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$
- (B) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
- (C) برای تمام مقادیر $x > 0$ ، $f(x) = x^{x/2}$.
- (D) مشتق $f'(x)$ برای تمام مقادیر $x > 0$ مثبت است.
- (E) مشتق $f'(x)$ برای تمام مقادیر $x > 0$ افزایشی است.

۴۵. یک خودروی آزمایشی بازدهی سوخت برابر با $E(v)$ برحسب مایل بر گالن سوخت را داراست، که در آن v سرعت خودرو برحسب مایل بر ساعت است. برای یک مسافت ۴ ساعته خاص، اگر $v=v(t)$ سرعت خودرو و t زمان از آغاز مسافت برحسب ساعت باشد، کدام یک از انتگرالهای زیر مقدار سوخت مصرفی خودرو را در این مسافت برحسب گالن محاسبه می کند؟

(A) $\int_0^4 \frac{v(t)}{E(v(t))} dt$

(B) $\int_0^4 \frac{E(v(t))}{v(t)} dt$

(C) $\int_0^4 \frac{tv(t)}{E(v(t))} dt$

(D) $\int_0^4 \frac{tE(v(t))}{v(t)} dt$

(E) $\int_0^4 v(t)E(v(t)) dt$

۴۶. برای $0 < t < \pi$ ، ماتریس $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ دارای دو مقدار ویژه مختلط و متفاوت λ_1 و λ_2 است. برای چه مقداری از t ، $0 < t < \pi$ ، رابطه $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ برقرار است؟

(A) $\frac{\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{4}$

(C) $\frac{\pi}{3}$

(D) $\frac{\pi}{2}$

(E) $\frac{2\pi}{3}$

۴۷. X و Y دو متغیر تصادفی مستقل اند که به طور یکنواختی در بازه $[0,1]$ توزیع شده اند. احتمال آنکه فاصله میان X و Y کمتر از ۰.۵ باشد چقدر است؟

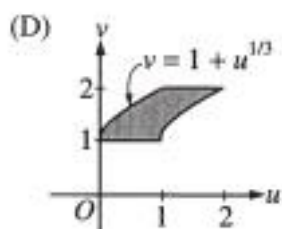
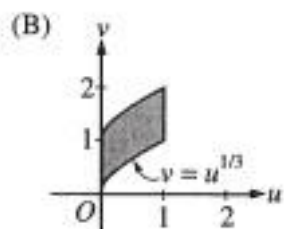
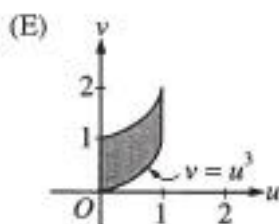
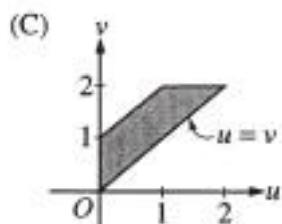
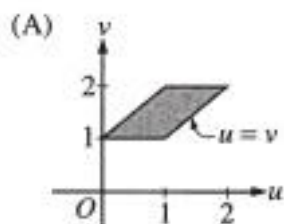
- (A) $\frac{1}{4}$
 (B) $\frac{1}{3}$
 (C) $\frac{1}{2}$
 (D) $\frac{2}{3}$
 (E) $\frac{3}{4}$

۴۸. تغییر متغیرها از صفحه XY به صفحه UV با روابط زیر مشخص شده اند

$$u = x^{1/3} + y$$

$$v = 1 + y.$$

با این تغییر متغیر، تصویر ناحیه $\{(x,y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ کدام یک از نواحی هاشور خورده زیر است؟



۴۹. اگر f تابعی پیوسته بر روی مجموعه اعداد حقیقی بوده و a و b اعدادی حقیقی باشند، کدام یک از روابط زیر باید صحیح باشند؟

I. $\int_a^b f(x) dx = \int_{a+3}^{b+3} f(x-3) dx$

II. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^3 f(x) dx - \int_b^3 f(x) dx$

III. $\int_{3a}^{3b} f(x) dx = 3 \int_a^b f(3x) dx$

(A) تنها I

(B) تنها II

(C) تنها I و II

(D) تنها II و III

(E) I، II، و III

۵۰. چند تابع پیوسته حقیقی f در بازه $[-1, 1]$ وجود دارد به گونه ای که برای هر x در بازه $[-1, 1]$ رابطه $(f(x))^2 = x^2$ برقرار باشد؟

(A) یک.

(B) دو.

(C) سه.

(D) چهار.

(E) بی نهایت.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2y)^k}{k}$$

۵۱. D ناحیه ای در صفحه xy است که در آن سری

(A) یک دیسک باز.

(B) ناحیه باز مقید شده درون یک بیضی.

(C) ناحیه باز مقید شده درون یک چهار ضلعی.

(D) ناحیه باز بین دو خط موازی.

(E) یک نیم صفحه باز.

۵۲. دستگاه معادلات خطی زیر بر روی تمامی اعداد حقیقی را در نظر بگیرید که در آن x, y, z متغیرها و b یک ثابت حقیقی است.

$$x + y + z = 0$$

$$x + 2y + 3z = 0$$

$$x + 3y + bz = 0$$

کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟

I. مقداری برای b وجود دارد که دستگاه هیچ جوابی ندارد.

II. مقداری برای b وجود دارد که دستگاه دقیقاً یک جواب دارد.

III. مقداری برای b وجود دارد که دستگاه بیش از یک جواب دارد.

(A) تنها II

(B) تنها I و II

(C) تنها I و III

(D) تنها II و III

(E) I، II، و III

۵۳. در صفحه مختلط، C دایره ای است که با معادله $|z| = 2$ در جهت مثبت (پادساعتگرد) مشخص می شود. در این صورت انتگرال زیر برابر است با:

$$\int_C \frac{dz}{(z-1)(z+3)^2} =$$

(A) 0

(B) $2\pi i$

(C) $\frac{\pi i}{2}$

(D) $\frac{\pi i}{8}$

(E) $\frac{\pi i}{16}$

۵۴. شکل درون یک مخزن آب مکعبی است که اندازه هر ضلع آن ۱۰ فوت است و دیواره های عمودی داشته و سقف ندارد. تابع $h(t)$ ارتفاع سطح آب مخزن برحسب فوت در زمان t است. با آغاز در زمان $t=0$ ، آب با دبی ثابت 1 فوت مکعب بر ثانیه به درون مخزن می ریزد، و همزمان آب با نرخ $0.25h(t)$ فوت مکعب بر ثانیه از مخزن خارج می شود. همچنان که $t \rightarrow \infty$ ، حد حجم آب در مخزن چقدر است؟

(A) ۴۰۰ فوت مکعب

(B) ۶۰۰ فوت مکعب

(C) ۱۰۰۰ فوت مکعب

(D) حدی وجود ندارد.

(E) حد وجود دارد ولی نمی توان بدون دانستن $h(0)$ آن را تعیین کرد.

۵۵. فرض کنید f تابعی مشتق پذیر از مرتبه دوم بر روی مجموعه اعداد حقیقی باشد و $f(0)$ ، $f'(0)$ و $f''(0)$ همگی منفی باشند. و فرض کنید f'' هر سه خاصیت زیر را داشته باشد.

I. بر روی بازه $[0, \infty)$ افزایشی باشد.

II. بر روی بازه $[0, \infty)$ تنها یک صفر داشته باشد.

III. بر روی بازه $[0, \infty)$ محدوده ای نداشته باشد.

کدام یک از ویژگیهای فوق را تابع f نیز لزوماً دارا می باشد؟

(A) تنها I

(B) تنها II

(C) تنها III

(D) تنها II و III

(E) I، II، و III

۵۶. برای هر مجموعه S و هر متریک d بر روی S ، کدام یک از موارد زیر متریک بر روی S است؟

(A) $4 + d$

(B) $e^d - 1$

(C) $d - |d|$

(D) d^2

(E) $\sqrt{d}$

۵۷. R میدان اعداد حقیقی و $R[x]$ حلقه چندجمله ای های بر حسب x با ضرایب در R است. کدام یک از زیرمجموعه های زیر از $R[x]$ زیرحلقه ای از $R[x]$ است؟

I. همه چند جمله ای هایی که ضریب x صفر است.

II. همه چند جمله ای هایی که درجه آنها صحیح زوج بوده به همراه چندجمله ای صفر.

III. همه چند جمله ای هایی که ضرایب آنها اعداد گویا می باشد.

(A) تنها I

(B) تنها II

(C) تنها I و III

(D) تنها II و III

(E) I، II، و III

۵۸. f تابعی با مقدار حقیقی و پیوسته بر روی مجموعه اعداد حقیقی R است. کدام یک از عبارات زیر برای مجموعه $S = \{f(c) : 0 < c < 1\}$ باید صحیح باشد.

I. S یک زیرمجموعه متصل از R است.

II. S یک زیرمجموعه باز از R است.

III. S یک زیرمجموعه مرزدار (مقید) از R است.

(A) تنها I

(B) تنها I و II

(C) تنها I و III

(D) تنها II و III

(E) I، II، و III

۵۹. یک گروه چرخه ای از مرتبه ۱۵ عضو X دارد به گونه ای که مجموعه $\{x^3, x^5, x^9\}$ دقیقاً دو عضو دارد. تعداد اعضا در مجموعه $\{x^{13n} \mid n \text{ عدد صحیح مثبت}\}$ برابر است با:
- (A) ۳
(B) ۵
(C) ۸
(D) ۱۵
(E) بی نهایت

۶۰. اگر S حلقه ای باشد که برای هر $s \in S$ ، خاصیت $s = s^2$ برقرار باشد، کدام یک از عبارات زیر باید صحیح باشد؟
- I. برای هر $s \in S$ ، $s+s=0$.
II. برای هر $s, t \in S$ ، $(s+t)^2 = s^2 + t^2$.
III. S دارای خاصیت جابجایی است.
- (A) تنها III
(B) تنها I و II
(C) تنها I و III
(D) تنها II و III
(E) I، II، و III

۶۱. بزرگترین عدد صحیحی که برای تمامی اعداد اول p بزرگتر از ۵ بر $p^4 - 1$ بخش پذیر باشد کدام است؟

- (A) 12
(B) 30
(C) 48
(D) 120
(E) 240

۶۲. ضریب x^3 در بسط عبارت $(1+x)^3(2+x^2)^{10}$ برابر است با

- (A) 2^{14}
(B) 31
(C) $\binom{3}{3} + \binom{10}{1}$
(D) $\binom{3}{3} + 2\binom{10}{1}$
(E) $\binom{3}{3}\binom{10}{1}2^9$

۶۳ دو نمودار $y = x^{12}$ و $y = 2^x$ در چند نقطه در صفحه xy همدیگر را قطع می کنند؟

- (A) هیچ
- (B) یک
- (C) دو
- (D) سه
- (E) چهار

۶۴ فرض کنید f یک تابع مقدار حقیقی پیوسته است که بر روی بازه بسته $[0,1]$ تعریف شده است. کدام یک از عبارات زیر باید صحیح باشد؟

- I. مقدار ثابت $C > 0$ وجود دارد به گونه ای که برای تمامی x و y در بازه $[0,1]$ ، رابطه $|f(x) - f(y)| \leq C$ برقرار باشد.
- II. مقدار ثابت $D > 0$ وجود دارد به گونه ای که برای تمامی x و y در بازه $[0,1]$ که رابطه $|x - y| \leq D$ را برآورده کنند، رابطه $|f(x) - f(y)| \leq 1$ برقرار باشد.
- III. مقدار ثابت $E > 0$ وجود دارد به گونه ای که برای تمامی x و y در بازه $[0,1]$ ، رابطه $|f(x) - f(y)| \leq E|x - y|$ برقرار باشد.

- (A) هیچ
- (B) یک
- (C) دو
- (D) سه
- (E) چهار

۶۵ فرض کنید $p(x)$ چندجمله ای $x^3 + ax^2 + bx + c$ باشد که در آن a, b, c اعداد ثابت حقیقی اند. اگر $p(-3) = p(2) = 0$ و $p'(-3) < 0$ باشد، کدام یک از مقادیر زیر مقدار ممکن برای C است؟

- (A) -27
- (B) -18
- (C) -6
- (D) -3
- (E) $-\frac{1}{2}$

66. In the xy -plane, if C is the circle $x^2 + y^2 = 9$, oriented counterclockwise, then $\oint_C -2y \, dx + x^2 \, dy =$

- (A) 0
- (B) 6π
- (C) 9π
- (D) 12π
- (E) 18π

پاسخنامه پرسشهای آزمون GRE و درصد افرادی که به هر پرسش پاسخ صحیح داده اند.

شماره	پاسخ	درصد افراد	نادرست	درست
1	C	73		
2	D	86		
3	C	88		
4	B	87		
5	E	83		
6	C	87		
7	B	81		
8	E	76		
9	A	77		
10	B	55		
11	A	80		
12	C	75		
13	A	72		
14	C	63		
15	B	61		
16	D	83		
17	E	80		
18	E	63		
19	B	55		
20	D	52		
21	D	71		
22	B	72		
23	C	72		
24	C	50		
25	D	70		
26	B	67		
27	E	65		
28	C	62		
29	B	63		
30	D	55		
31	C	65		
32	D	59		
33	A	72		
34	A	52		
35	B	50		

شماره	پاسخ	درصد افراد	نادرست	درست
36	D	38		
37	B	32		
38	B	54		
39	B	53		
40	E	54		
41	E	49		
42	D	60		
43	B	64		
44	D	39		
45	A	47		
46	C	50		
47	E	32		
48	A	36		
49	E	41		
50	D	34		
51	D	35		
52	D	52		
53	D	35		
54	A	31		
55	D	28		
56	E	19		
57	C	20		
58	C	34		
59	A	28		
60	E	23		
61	E	25		
62	A	36		
63	D	17		
64	C	35		
65	A	44		
66	E	58		